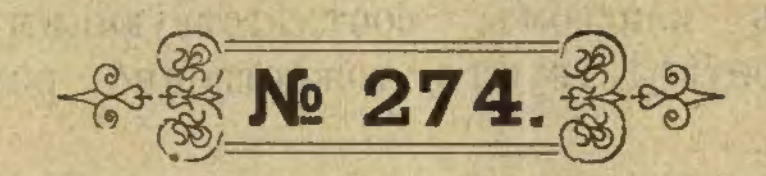
XXIII Сем. № 10.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



№ 274.

Нѣкоторыя приложенія математической логики къ теоріи общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго.

1. Представимъ себѣ логическій классъ A, элементами котораго служатъ простыя числа, неравныя единицѣ,

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_\lambda; \beta_1 . \beta_2, \ldots \beta_\nu; \ldots \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\mu,$$

взятыя въ конечномъ числѣ, причемъ

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots . = \alpha_\lambda; \beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_\nu; \ldots$$

$$\ldots \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_\mu. \ ^{*)}$$

Такимъ образомъ равныя между собою простыя числа класса A мы будемъ отмѣчать одними и тѣми же буквами, различающимися однако между собой нижними указателями. Во всемъ послѣдующемъ из-

*) Эти равенства только *ариѳметическія*; логически равными элементами будемъ считать лишь тѣ, которые означены одною и тою же буквой съ однимъ и тѣмъ же указателемъ.

ложеніи мы будемъ разсматривать логическіе классы только такого вида. Перемножая *ариѳметически* элементы класса A, мы получимъ цѣлое число, которое обозначимъ черезъ [A] —

$$[A] = \alpha_1^{\lambda} \beta_1^{\nu} \ldots \gamma_1^{\mu}.$$

О классѣ A и числѣ [A] мы будемъ говорить, что они соотвѣтствуютъ другъ другу. Разлагая данное цѣлое число на первоначальныхъ множителей и снабжая равныхъ первоначальныхъ множителей послѣдовательными указателями 1, 2, 3 . . ., легко найти классъ, соотвѣтствующій данному цѣлому числу. Кромѣ того, мы условимся считать логическій ноль классомъ, соотвѣтствующимъ цѣлому числу 1. Равнымъ числамъ соотвѣтствуютъ тожественно равные классы и наоборотъ.

2. Изъ способа составленія наименьшаго кратнаго и общаго наибольшаго дѣлителя нѣсколькихъ данныхъ чиселъ при помощи разложенія этихъ чиселъ на первоначальныхъ множителей вытекаютъ слѣдующія предложенія:

a) Логической суммѣ классовъ A, B, C. . . . . соотвѣтствуетъ число, равное наименьшему кратному чиселъ [A], [B], [C], . . . , соотвѣтствующихъ даннымъ классамъ.

b) Логическому произведенію классовъ A, B, C . . . . соотвѣтствуетъ число, равное общему наибольшему дѣлителю чиселъ [A], [B], [C], . . . , соотвѣтствующихъ даннымъ классамъ.

3. Послѣ всего вышесказаннаго становится яснымъ, что всякая логическая операція надъ рядомъ классовъ A, B, C . . . приводитъ къ нѣкоторому предложенію изъ области теоріи наименьшаго кратнаго и общаго наибольшаго дѣлителя. Дѣйствительно, если путемъ тожественныхъ преобразованій, выполненныхъ по правиламъ логическаго вычисленія, мы находимъ, что

$$F(A, B, C \ldots) = \varphi(A, B, C \ldots),$$

гдѣ F и φ — символы логическихъ функцій, т. е. нѣкотораго ряда логическихъ операцій, — то и

$$[F] = [\varphi],$$

т. е. два числа, получаемыя по совершеніи надъ рядомъ чиселъ, соотвѣтствующихъ даннымъ классамъ, нѣкоторыхъ двухъ цѣпей дѣйствій нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго, — оказываются равными.

Такъ изъ логическаго равенства

$$A + B + C = A + (B + C)$$

вытекаетъ извѣстное предложеніе: чтобы найти наименьшее кратное трехъ чиселъ, можно найти наименьшее кратное между однимъ изъ нихъ и наименьшимъ кратнымъ двухъ другихъ чиселъ.

4. Покажемъ, какъ при помощи указаннаго метода можно прійти къ нѣкоторымъ ариѳметическимъ теоремамъ.

Для этого постараемся изучить ближе природу *симетрическихъ* функцій въ логическомъ вычисленіи.

Такъ какъ логическому вычисленію чуждъ алгориѳмъ степени, — другими словами, любая степень (цѣлая, положительная) нѣкотораго класса равна этому же классу, то всякая симетрическая функцій сводится къ суммѣ *простыхъ* *) симетрическихъ функцій.

Далѣе, изъ формулы

$$AB + A = A \qquad (1)$$

легко вывести, что логическая сумма двухъ простыхъ симетрическихъ функцій приводится къ той изъ нихъ, степень однородности которой ниже. Дѣйствительно, пусть k и l — степени однородности этихъ двухъ функцій, причемъ $k < l$.

Каждый членъ второй функціи, будучи вида

$$A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_k} A_{\alpha_{k+1}} \ldots A_{\alpha_l} \qquad (2),$$

— гдѣ A_{α_1}, A_{α_2} . . . суть данные классы, — содержитъ множителемъ членъ

$$A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_k}$$

первой функціи. Поэтому (см. 1) членъ (2) въ общей суммѣ двухъ функцій исчезаетъ, а потому и вся вторая функція уничтожается. Отсюда слѣдуетъ, что всякая симетрическая функція въ логическомъ вычисленіи приводится лишь къ одной простой симетрической функціи.

Этой теоремѣ въ логическомъ вычисленіи отвѣчаетъ слѣдующая ариѳметическая: если мы свяжемъ числа [A], [B], [C], . . . какимъ бы то ни было образомъ, но симетрично по отношенію къ этимъ числамъ рядомъ дѣйствій 1) нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя и 2) нахожденія наименьшаго кратнаго, то, не измѣняя окончательнаго численнаго результата, этотъ рядъ дѣйствій можно замѣнить составленіемъ группъ сочетаній изъ данныхъ чиселъ [A], [B], [C], ... по нѣкоторому числу k, нахожденіемъ общаго наибольшаго дѣлителя каждой группы и наконецъ нахожденіемъ наименьшаго кратнаго всѣхъ полученныхъ общихъ наибольшихъ дѣлителей Число k есть наименьшее число различныхъ множителей, входящихъ въ составъ отдѣльныхъ членовъ того логическаго многочлена, который получится, если заданныя симетричныя ариѳметическія операціи замѣнить соотвѣтственными [см. 2, (a), (b)] логическими.

5. Примѣнимъ изложенныя выше соображенія къ вычисленію симетричной функціи **) вида

$$\Pi (A_{\alpha_1} + A_{\alpha_2} + \ldots + A_{\alpha_m}),$$

---

*) Подъ именемъ простыхъ симетрическихъ функцій нѣсколькихъ классовъ мы разумѣемъ сумму нѣсколькихъ классовъ, сумму логическихъ произведеній этихъ классовъ по два, по три и т. д.

**) Конечно, *логической*.

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ суть m различныхъ чиселъ, выбранныхъ изъ ряда n послѣдовательныхъ чиселъ

$$1, 2, 3, \ldots n.$$

Произведеніе П распространяется на всѣ возможныя различныя суммы вида

$$A_{\alpha_1} + A_{\alpha_2} + \ldots + A_{\alpha_m} \qquad (3).$$

Такимъ образомъ разсматриваемая логическая функція симетрична по отношенію къ входящимъ въ нее классамъ $A_1, A_2, \ldots A_n$.

Среди перемножаемыхъ суммъ вида (3) отберемъ тѣ, которыя содержатъ классъ A_1. Число такихъ суммъ равно C_{n-1}^{m-1}, гдѣ C—символъ числа сочетаній.

Остальныя суммы по m классовъ составлены лишь изъ $n-1$ классовъ $A_2, A_3, \ldots A_n$, а потому остается всего C_{n-1}^{m} суммъ. Среди нихъ отберемъ тѣ суммы, въ которыхъ встрѣчается классъ A_2; число такихъ суммъ есть C_{n-2}^{m-1}. Среди оставшихся C_{n-2}^{m} суммъ отберемъ всѣ, содержащія классъ A_3; число ихъ будетъ C_{n-3}^{m-1}, и т. д.. . Наконецъ, послѣ выбора суммъ съ членомъ A_{n-m}^{m} остается

$$C_{n-(n-m)}^{m} = C_m^m = 1$$

суммъ, т. е. одна сумма, содержащая классы $A_{n-m+1}, A_{n-m+2}, \ldots A_n$ и потому равная суммѣ

$$A_{n-m+1} + A_{n-m+2} + \ldots + A_n .$$

Я утверждаю, что по раскрытіи скобокъ въ функціи

$$\Pi\left(A_{\alpha_1} + A_{\alpha_2} + \ldots + A_{\alpha_m}\right) \qquad (4)$$

наименьшее число k различныхъ множителей, входящихъ въ составъ отдѣльнаго члена, есть $n - m + 1$. Дѣйствительно, оно не можетъ быть болѣе $n - m + 1$. такъ какъ при помощи указанной послѣдовательной отборки суммъ съ членами $A_1, A_2, \ldots A_{n-m}, A_{n-m+1}$ можно составить при открытіи скобокъ членъ $A_1 A_2 \ldots A_{n-m} A_{n-m+1}$. Но число k не можетъ быть и менѣе $n - m + 1$. Дѣйствительно, пусть

$$k < n - m + 1 \qquad (5).$$

Среди членовъ многочлена, получаемаго по раскрытіи скобокъ въ функціи (4), разсмотримъ членъ

$$A_1 A_2 A_3 \ldots A_k , \qquad (6)$$

который навѣрно встрѣтится, такъ какъ онъ входитъ въ составъ простой симетрической функціи k-й степени однородности, къ которой приводится функція (4). Изъ неравенства (5) имѣемъ:

$$n - k > m - 1, \text{ или } n - k \geqslant m .$$

Поэтому среди перемножаемыхъ въ произведенiи (4) суммъ есть хоть одна сумма, содержащая лишь члены. выбранные въ числѣ m среди членовъ

$$A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots A_n,$$

но вовсе не содержащая ни одного изъ членовъ $A_1, A_2, \ldots A_k$. Но тогда оказывается, что раскрывая скобки въ произведенiи (4) нельзя получить члена (6), такъ какъ среди перемножаемыхъ суммъ есть хоть одна, не содержащая ни одного изъ множителей этого члена; а отсутствiе члена (6) среди членовъ функцiи (4) противорѣчитъ предположенiю, что она сводится къ простой симетрической функцiи $k^{-й}$ степени однородности.

Изъ всего сказаннаго вытекаетъ равенство:

$$\Pi(A_{\alpha_1} + A_{\alpha_2} + \cdots + A_{\alpha_m}) = \Sigma A_{\alpha'_1} A_{\alpha'_2} \cdots A_{\alpha'_{n-m+1}}, \quad (7)$$

гдѣ $\alpha'_1, \alpha'_2 \ldots \alpha'_{n-m+1}$ принимаютъ всевозможныя различныя между собою значенiя среди чиселъ

$$1, 2, 3 \ldots n.$$

Изъ логическаго равенства (7) вытекаетъ слѣдующая ариѳметическая теорема: если изъ данныхъ n чиселъ составить группы сочетанiй по m изъ нихъ. найти наименьшее кратное каждой группы, а затѣмъ — общаго наибольшаго дѣлителя этихъ наименьшихъ кратныхъ, то численный результатъ этихъ операцiй будетъ тотъ же самый, который получимъ, если найдемъ наименьшее кратное общихъ наибольшихъ дѣлителей, вычисленныхъ для каждой изъ группъ сочетанiй изъ n данныхъ чиселъ по $n - m + 1$ чиселъ.

При условiи

$$n - m + 1 = m, \text{ или } n = 2m - 1,$$

теорема эта даетъ слѣдствiе: общiй наибольшiй дѣлитель наименьшихъ кратныхъ всевозможныхъ группъ по m чиселъ изъ данныхъ $2m - 1$ чиселъ равенъ наименьшему кратному всѣхъ общихъ наибольшихъ дѣлителей для тѣхъ же группъ.

Е. Буницкiй (Одесса).

ОБЪ ЭЛЕМЕНТАРНОМЪ ОБЪЯСНЕНIИ ЯВЛЕНIЯ ПРИЛИВА и ОТЛИВА.

Уже многiе древнiе и средневѣковые писатели упоминаютъ о приливахъ (Посидонiй, Страбонъ, Цезарь. Плинiй и др.) и даже говорятъ о связи этого явленiя съ движенiемъ луны и солнца. По словамъ Эйлера: „Аристотель будучи съ Александромъ Великимъ въ Восточной Индiи на толикое подвигнутъ былъ удивленiе (явленiемъ прилива и

отлива), что предпріялъ гнаться за уступающей водой; но послѣдующій приливъ Аристотеля неуспѣвшаго возвратиться затопилъ, и покрылъ водою, и не можно было узнать какія онъ имѣлъ размышленія при семъ смертоносномъ опытѣ" [1]) Если даже это и не вѣрно исторически, если Аристотель никогда и не былъ въ Индіи, все же существованіе сказанія такого рода свидѣтельствуетъ о томъ, что люди всегда удивлялись явленію прилива и отлива и долгое время напрасно старались найти его объясненіе. Когда же съ наступленіемъ новыхъ вѣковъ физико-математическія науки стали развиваться, на приливы и отливы было обращено должное вниманіе. Кеплеръ объяснилъ ихъ притяженіемъ луны, но такъ какъ законъ этого притяженія ему извѣстенъ не былъ, то не удивительно, что Галилей счелъ это объясненіе возвращеніемъ къ средневѣковой схоластикѣ; тѣмъ болѣе, что рядомъ съ этимъ у Кеплера встрѣчается, по словамъ Эйлера, слѣдующая ни на чемъ не основанная аналогія: „Кеплеръ, который въ протчемъ былъ великій Астрономъ, и украшеніе нѣмецкой земли, думалъ, что земля, такъ какъ и всѣ небесныя тѣла, есть звѣрь оживотворенный, и приливъ и отливъ почиталъ за дѣйствіе его дыханія. По мнѣнію сего философа люди и всѣ звѣри суть аки бы пресмыкающіяся или блохи питающіяся отъ кожи сего звѣря" [2]). Декартъ оеъяснялъ приливъ на основаніи своей теоріи вихрей; Галилей — вращеніемъ земли вокругъ оси. Но первое вѣрное объясненіе далъ великій Ньютонъ въ своей безсмертной книгѣ: „Philosophiae naturalis principia mathematica". Это сочиненіе появилось въ 1686—1687 годахъ, и слѣдовательно съ того времени прошло слишкомъ два вѣка. За это время теорія приливовъ разработана очень подробно. Въ 1737 году Парижская Академія Наукъ предложила премію за сочиненіе о приливахъ и отливахъ. Преміи удостоились (въ 1740 году) Даніилъ Бернули, Маклоренъ и Эйлеръ [3]), которые подробно развили теорію Ньютона. Въ 1775 году Лапласъ опубликовалъ въ Мемуарахъ Французской Академіи Наукъ свой первый трактатъ о приливахъ и отливахъ. Онъ показалъ, что теорія этого явленія въ такомъ видѣ, какъ ее развили Ньютонъ, Бернули, Маклоренъ и Эйлеръ, не соотвѣтствуетъ дѣйствительности, и далъ болѣе точную теорію. Послѣ него, значитъ уже въ XIX столѣтіи, приливы изучали: Wewell, Lubbock, Börgen и многіе другіе, которые разбирали частности и, кромѣ того Airy, предложившій теорію каналовъ. Въ послѣднее время теоріей приливовъ занимались знаменитый Вилльямъ Томсонъ и G. H. Darwin. Благодаря, главнымъ образомъ, трудамъ послѣдняго, теорія приливовъ получила весьма обширное примѣненіе въ другихъ областяхъ астрономіи и космогоніи.

Изъ этого, правда, очень краткаго и неполнаго историческаго обзора, мы видимъ, что явленіемъ приливовъ и отливовъ интересовались

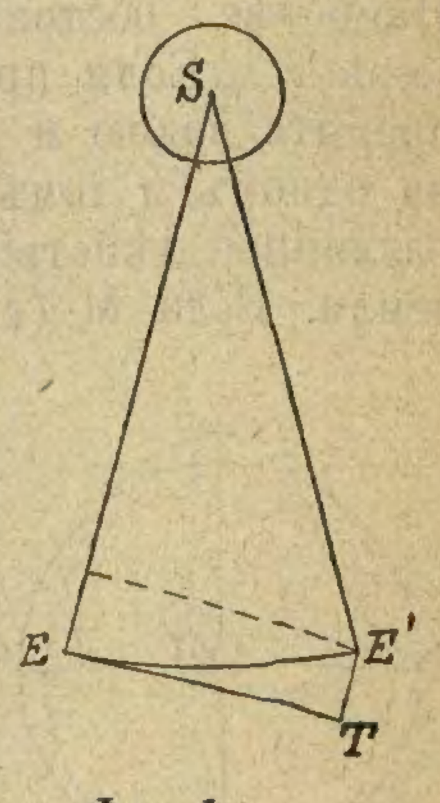
---

[1]) „Письма о разныхъ физическихъ и философическихъ матеріяхъ, писанныя къ нѣкоторой нѣмецкой принцессѣ". Съ французскаго языка на россійскій переведенныя Степаномъ Румовскимъ. Ч. I. Спб. 1768. Стр. 252.

[2]) Ibidem. Стр. 252.

[3]) Кромѣ нихъ еще получилъ премію іезуитъ Кавальери, но его трактатъ не имѣетъ теперь значенія, такъ какъ основывается на Декартовой теоріи вихрей.

наиболѣе выдающіеся ученые всѣхъ временъ (Плиній, Декартъ, Кеплеръ, Галилей, Ньютонъ, Лапласъ, Томсонъ). Я думаю поэтому, что и большая публика интересовалась всегда и интересуется этимъ, съ перваго взгляда, загадочнымъ явленіемъ. Но конечно вся теорія цѣликомъ этой публикѣ не доступна, да и врядъ ли интересна; а доступенъ и интересенъ ей тотъ основной пунктъ, въ которомъ объясняется возникновеніе приливныхъ силъ и слѣдствіе этого возникновенія. Между тѣмъ теперь, когда теорія приливовъ развилась въ обширнѣйшее ученіе, этому основному пункту удѣляютъ, по моему мнѣнію, недостаточно вниманія, и поэтому въ большинствѣ популярныхъ книгъ, учебниковъ и даже спеціальныхъ сочиненій даются неправильныя объясненія явленія приливовъ и отливовъ. Вообще эти объясненія можно разбить на двѣ категоріи. Наиболѣе обстоятельное объясненіе первой категоріи мы встрѣчаемъ у Krümmell'я, и поэтому я приведу здѣсь его содержаніе: Сначала представимъ себѣ, что луна не существуетъ и разсмотримъ, какъ солнце будетъ вліять на воды земли. Пусть S—солнце (см. черт. 1), E—земля, которая движется вокругъ солнца по криволинейному пути. Пусть въ секунду она прошла бы такъ до точки T. Но такъ какъ на самомъ дѣлѣ впродолженіи всей этой секунды земля падала на солнце подъ вліяніемъ силы тяготѣнія, то она будетъ находиться не въ T, а въ E'. Такимъ образомъ объясняется криволинейное движеніе земли. „При этомъ, говоритъ далѣе Krümmel, молчаливо предполагаютъ, что земля разсматривается, какъ матерьяльная точка. На самомъ же дѣлѣ земля есть аггрегатъ матерьяльныхъ точекъ, на каждую изъ которыхъ дѣйствуетъ притяженіе солнца и которыя, такимъ образомъ, вмѣстѣ падаютъ на солнце. Притяженіе же солнца на каждую точку обратно пропорціонально квадрату разстоянія, а слѣдовательно оно дѣйствуетъ на обращенныя къ солнцу части земли сильнѣе, чѣмъ на частицы болѣе всего отдаленныя отъ солнца, и, такъ какъ *часть массы, составляющей земную оболочку, жидка, т. е. удобоподвижна то частички жидкости на обращенной къ солнцу сторонѣ будутъ нѣсколько быстрѣе падать на него, чѣмъ центръ земли, отдаленныя же нѣсколько медленнѣе.* Слѣдовательно впродолженіи минуты, въ которую центръ земли пройдетъ путь TE', обращенныя къ солнцу частички сдѣлаютъ нѣсколько большій путь, наиболѣе же отдаленныя отъ солнца нѣсколько меньшій путь, чѣмъ TE'. Поэтому жидкая оболочка земли нѣсколько растянется по направленію къ солнцу“. [1])



Фиг. 1.

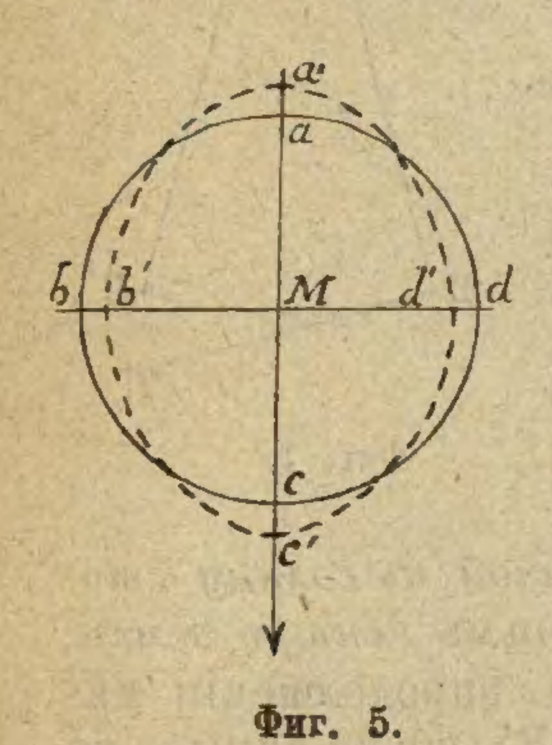
Къ этому типу принадлежатъ еще напр. объясненія въ „Астро-

[1]) „Handbuch der Ozeanographie,“ von Prof. D-r G. von Boguslavski und D-r Otto Krümmel. Band II. „Die Bewegungen des Meeres“, von D-r Otto Krümmel. Stuttgard. 1887. Seite 167—168.

номіи“ Гершеля [1]) и въ учебникахъ географіи Ленца и Kloeden'а. [2]) Сюда же слѣдуетъ отнести объясненіе Эйлера данное имъ въ „Письмахъ къ принцессѣ„. [3])

Объясненія Krümmel'я, Гершеля, Ленца, Kloeden'а и Эйлера страдаютъ однимъ и тѣмъ же недостаткомъ: здѣсь не принято во вниманіе, что на всѣ частицы океана дѣйствуетъ сила земной тяжести, которая не позволяетъ этимъ частицамъ отдаляться отъ центра, пока на нихъ не подѣйствуетъ сила большая этой тяжести и направленная въ обратную сторону. Поэтому нельзя сказать, какъ говорятъ Krümmel и Эйлеръ, что, такъ какъ вода удобоподвижна, то она вытягивается къ солнцу и отъ солнца. Вода удобоподвижна въ свободномъ состояніи, напр. въ центрѣ земли, гдѣ не дѣйствуетъ сила тяжести; но на поверхности эта удобоподвижность ограничивается, и поднять воду безъ особаго усилія мы не можемъ. Мы увидимъ ниже, что и въ объясненіяхъ второго типа тоже не принята во вниманіе земная тяжесть.

Объясненія второй категоріи отличаются отъ объясненій первой только тѣмъ, что въ нихъ не говорится о паденіи земли по направленію къ солнцу или лунѣ, а говорится только о силахъ притяженія. Наиболѣе обстоятельное толкованіе этого типа мы находимъ у H. Lentz'а: „Если предположить, что земля со всѣхъ сторонъ равномѣрно покрыта водою и что луна и солнце находятся въ плоскости экватора на одномъ и томъ же меридіанѣ, то получится, по закону тяготѣнія, различное дѣйствіе силы притяженія этихъ свѣтилъ на различныя части земли. Если M (см черт. 2) — центръ земли, кругъ же *a b c d* представляетъ ея экваторъ и *ac* меридіанъ, въ которомъ находятся солнце и луна, то частицы воды въ *c* будутъ сильнѣе притягиваться, чѣмъ центръ земли, частицы же въ *a*—слабѣе; вслѣдствіе большой отдаленности земли эта разность притяженій будетъ приблизительно равной величины и степень поднятія воды *aa'* будетъ поэтому равна степени поднятія воды *cc'*. Точки же *b* и *d* экватора, хотя и притягиваются такъ же, какъ и центръ земли, но поднятіе воды въ *a* и *c* должно произвести гдѣ-нибудь соотвѣтствующее пониженіе и, такъ какъ измѣненіе круга должно быть симметрично относительно линіи *ac*, то можно сдѣлать допущеніе, что опусканіе поверхности моря въ *b* и *d* точно соотвѣтствуетъ повышенію въ *a* и *c*, такъ что кругъ *a b c d* измѣняется въ эллипсъ *a' b' c' d'*“. [4])



Фиг. 5.

---

[1]) „Изложеніе Астрономіи“ Гершеля; пер Крузенштерна. Ч. II. 1838. Стр. 142, § 528.

[2]) „Физическая географія.“ Сост. акад. Э. Ленцъ. Спб. 1893. Стр. 72—73. § 41. Handbuch der Erdkunde von Gustav Adolf von Kloeden. Erster Theil: Hanbluch der physischen Geographie. 3 Aufl. Brl. 1873. Стр. 644—645.

[3]) Стр. 255—260. Письма 64 и 65.

[4]) „Von der Fluth und Ebbe d s Meeres“ von Hugo Lentz, Hamburg. 1873. Стр .5.

Этотъ родъ объясненій самый распространенный [1]). Чтобы болѣе ясно понять его неточность, представимъ себѣ слѣдующій примѣръ: пусть на одной изъ чашекъ вѣсовъ лежитъ тѣло, которое мы поднять не можемъ; уравновѣсимъ его, положивъ на другую чашку вѣсовъ равный ему по тяжести грузъ. Если мы теперь потянемъ наше тѣло вверхъ, то оно подымется вмѣстѣ съ чашкою вѣсовъ. Сказать, что мы подняли наше тѣло, было бы неправильно: не только наша сила подняла его, но и сила тяжести уравновѣшивающаго груза. А между тѣмъ совершенно такъ объясняютъ явленіе прилива Lentz и мн. др.

Итакъ мы видимъ, что въ наиболѣе распространенныхъ книгахъ нѣтъ правильнаго объясненія интересующаго насъ явленія. Между тѣмъ у Ньютона было вполнѣ правильное элементарное объясненіе возникновенія приливныхъ силъ и самихъ приливовъ. Поэтому любопытно будетъ прослѣдить исторически, какъ эволюціонировало оно до своей настоящей формы.

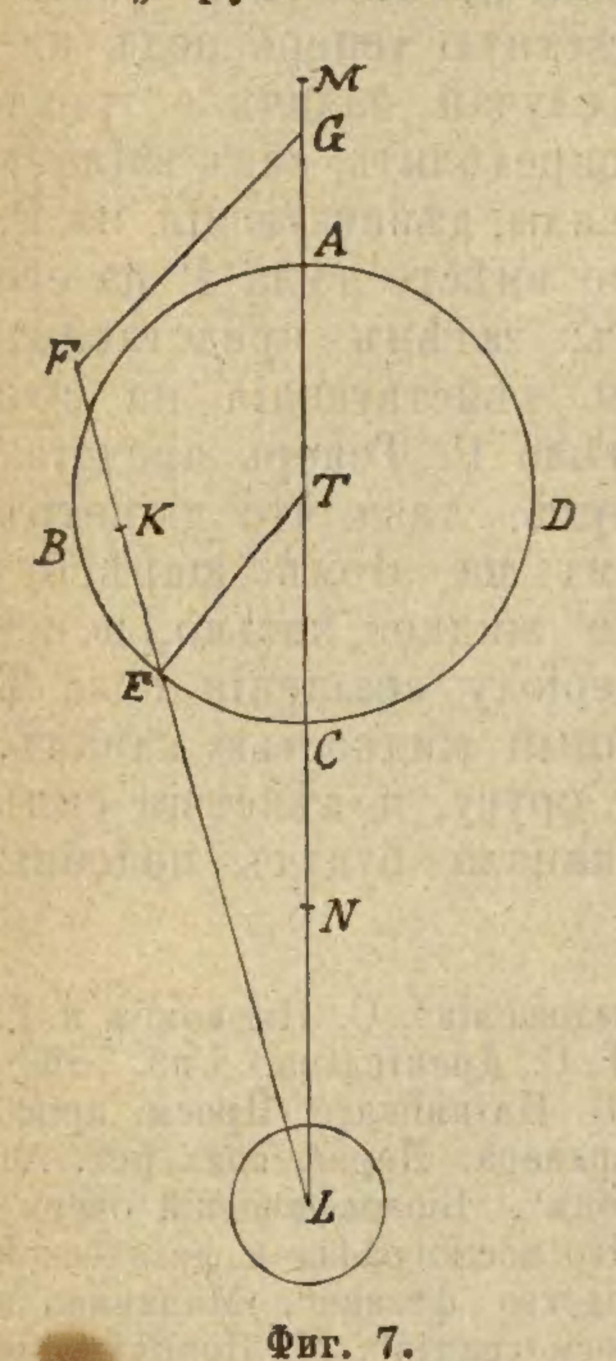
Въ первомъ томѣ „Математическихъ Началъ Естественной Философіи" (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) Ньютонъ разбираетъ, между прочимъ слѣдующую задачу, извѣстную теперь подъ названіемъ „задачи о пертурбаціяхъ" (частный случай задачи о трехъ тѣлахъ): Вокругъ шара T вращается шаръ P; опредѣлить, какъ вліяетъ на это вращеніе третій шаръ S [2]). Разобравъ силы, дѣйствующія на P, онъ дѣлаетъ слѣдующее: представимъ себѣ, что вмѣсто тѣла P на его орбитѣ находится большое число жидкихъ тѣлъ; затѣмъ представимъ себѣ, что эти тѣла сольются въ кольцо. Силы, дѣйствующія на это кольцо, будутъ тѣ же, которыя дѣйствовали на тѣло P. Теперь представимъ себѣ, что шаръ T расширился или распухъ, такъ что діаметръ его сталъ равенъ діаметру кольца; пусть затѣмъ на этомъ шарѣ будетъ вырытъ каналъ, въ который войдетъ наше жидкое кольцо, и періодъ вращенія кольца пусть будетъ равенъ періоду вращенія тѣла T вокругъ оси. Тогда мы будемъ имѣть наполненный жидкостью каналъ, обходящій нашъ шаръ T (землю) по большому кругу, и дѣйствія силъ тѣла S (луны или солнца) на жидкость этого канала будутъ подобны

---

[1]) См. напр.: a) „Астрономія въ общепонятномъ изложеніи". С. Ньюкомба и Р. Энгельмана, дополненная Г. Фогелемъ. Пер. съ II изд. Н. С. Дрентельна. Спб. 1896. Стр. 78; b) Клейнъ. „Астрономическіе вечера". Ред. К. П. Пятницкаго. Просм. проф. С. Н. Глазенапъ. Спб. 1898; c) „Изъ природы". Соч. Ларднера. Перев. подъ ред. А. Буйницкаго. Ч. I. Спб. 1859. Стр. 140—142; d) „Ньютонъ". Біографическій очеркъ М. М. Филиппова. Спб. 1892. Стр. 46—48; e) „Руководство космографіи и физической географіи". Малинина и Буренина. Стр. 161; f) „Руководство физики". Малинина и Буренина. Изд. IX. М. 1894. Стр. 158; g) „Начала космографіи". М. Попруженко. Изд. II. М. 1895. Стр. 108-9; h) „Учебникъ Математической Географіи" (Космографія)." Сост. Н. Степановъ. М. 1896. Стр. 112-114; i) Элизе Реклю. „Описаніе жизни земного шара". Перев. подъ ред. Н. Рубакина. Выпускъ IV. „Океанъ". Спб. 1895. Глава III, стр. 95; j) „Das Fluthphänomen nnd sein Zusammenhang mit den säkularen Schwankungen des Seespiegels". Von D-r J. H. Schmuck. Leipig. 1874; k) Сборникъ статей въ помощь самообразованію по математикѣ, физикѣ, химіи и астрономіи, составленный кружкомъ преподавателей. Т. II. М. 1898. Статья 39: „Всемірное тяготѣніе". С. Щербакова. Стр. 359 360; l) Клейнъ. „Чудеса земного шара". Прил. къ журн. „Образованіе". Стр. 109.

[2]) Propositio LXII. Theorema XXVI. T. I.

дѣйствію тѣла S на тѣло P. Такимъ образомъ Ньютонъ свелъ явленіе прилива и отлива къ частному случаю вышеназванной задачи. Но такого рода упрощеніе можетъ быть и было причиною того, что общераспространенное объясненіе приливовъ неправильно; мнѣ кажется, что посвяти Ньютонъ этому вопросу отдѣльную статью, было бы иначе. Правда, въ третьемъ томѣ того же сочиненія есть специальная статья о приливахъ [1]), но здѣсь интересующій насъ пунктъ считается объясненнымъ. Изданіе „Началъ", которымъ я пользовался, снабжено комментаріями L Seur'a и Jacquier [2]); и вотъ, вышеупомянутая статья о приливахъ, для большей ясности, сопровождается примѣчаніемъ, гдѣ особо излагается возникновеніе приливныхъ силъ и приливовъ. Этотъ фактъ свидѣтельствуетъ о томъ, что изложеніе Ньютона въ первомъ томѣ не такъ подробно, какъ это необходимо для яснаго пониманія даннаго явленія. Я приведу здѣсь, въ переводѣ на русскій языкъ все это примѣчаніе, такъ какъ въ немъ собрано то, что у Ньютона разбросано въ разныхъ мѣстахъ вышеупомянутой главы перваго тома:



Фиг. 7.

„Кругъ описанный изъ центра T изображаетъ землю (см. черт. 3), а кругъ описанный изъ центра L луну. Если на землю не будетъ дѣйствовать ничего, то земля, покрытая со всѣхъ сторонъ глубокою водою, и оставаясь въ покоѣ, приметъ форму сферы. Но каждая часть земли тяготѣетъ къ лунѣ, причемъ сила тяжести обратно пропорціональна разстоянію отъ ея центра. Пусть прямая LT изображаетъ силу ускоренія къ лунѣ тѣла находящагося въ центрѣ T, и пусть E любая частичка жидкости моря. Если на продолженіи прямой LE отложимъ LK равное LT и если LF относится къ LK такъ, какъ квадратъ LK къ квадрату LE, то прямая LF изобразитъ силу тяжести къ лунѣ тѣла находящагося въ мѣстѣ E; эта сила разлагается на силы FG и GL. Если же отъ той силы, которая приложена въ E, т. е. отъ GL, отнять силу TL, которая притягиваетъ центръ земли къ лунѣ, то останутся силы FG и GT, которыя дѣйствуютъ на тѣло E, кромѣ силы его собственной тяжести къ центру земли и силы общей у него съ центромъ земли. Пусть C будетъ точка земли, для которой луна въ зенитѣ, A же—противоположная точка; и пусть точки B и D расположены на кругѣ имѣющемъ луну на горизонтѣ. Тогда очевидно, что точка G

[1]) T. III. Propositio XXIV. Theorema XIX. „Fluxum et refluxum maris ab actionibus Solis ac Lunae oriri".

[2]) „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"; Auctore Isaako Newtono Eq Aurato; Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio P. P. Thomae Le Seur et Francisci Jacquier, Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ, Matheseos Professorum. Editio altera, longe accuratior et emendatior. Coloniae Allobrogum. MDCCLX.

дальше всего отстоитъ отъ T, когда точка E находится въ C и A. Въ первомъ случаѣ точка G приходитъ въ M, во второмъ — въ N. Когда же точка E находится на кругѣ BD, точка G почти совпадаетъ съ T и такимъ образомъ всѣ частицы, расположенныя на кругѣ BD, подчиняются только силѣ тяжести и силѣ FG; послѣдняя же будетъ равна BT или GT, такъ какъ точки F и K сольются. *Поэтому частички жидкости въ мѣстахъ B и D, кромѣ силы собственной тяжести, притягиваются къ центру T силою происходящей отъ луны.* Частицы въ мѣстѣ C притягиваются къ лунѣ сильнѣе, чѣмъ вся земля, которую можно вообразить сосредоточенною всей массой въ центрѣ T; частицы же въ A притягиваются къ лунѣ слабѣе, чѣмъ вся земля въ T. И потому эти точки *A и C словно растягиваются въ противоположныя стороны.* Частички же круга BD притягиваются къ T сильнѣе; въ мѣстахъ среднихъ между A или C и B или D, частицы подвержены и тому и другому условію (что A и что B). Чѣмъ ближе частицы жидкости къ C или къ A, тѣмъ меньше ихъ тяжесть, ибо вслѣдствіе дѣйствія луны или силы GT, собственная тяжесть ихъ уменьшается. Чѣмъ ближе частицы къ точкамъ B и D, тѣмъ онѣ тяжелѣе, ибо вслѣдствіе такого же дѣйствія луны или силы FG, собственная тяжесть возрастаетъ. Но, такъ какъ шаръ ABCD предполагается покрытымъ повсюду достаточно глубокою жидкостью, частички же жидкости уступаютъ приложенной къ каждой изъ нихъ силѣ и, уступая, легко передвигаются, то жидкость, которая расположена у A и C, вытѣсняется жидкостью, расположенной въ B и D, какъ болѣе легкая болѣе тяжелою. Слѣдовательно жидкость возвышается при A и C до тѣхъ поръ, пока, понятно, большая масса и большая высота жидкости не уравновѣсятъ ея меньшую тяжесть и вездѣ не установится равновѣсіе. Поэтому поверхность моря складывается въ фигуру сфероида, коего ось прямая AC, которой продолженіе пройдетъ черезъ луну. Отсюда очевидно, что фигура моря должна образовать продолговатый сфероидъ". [1])

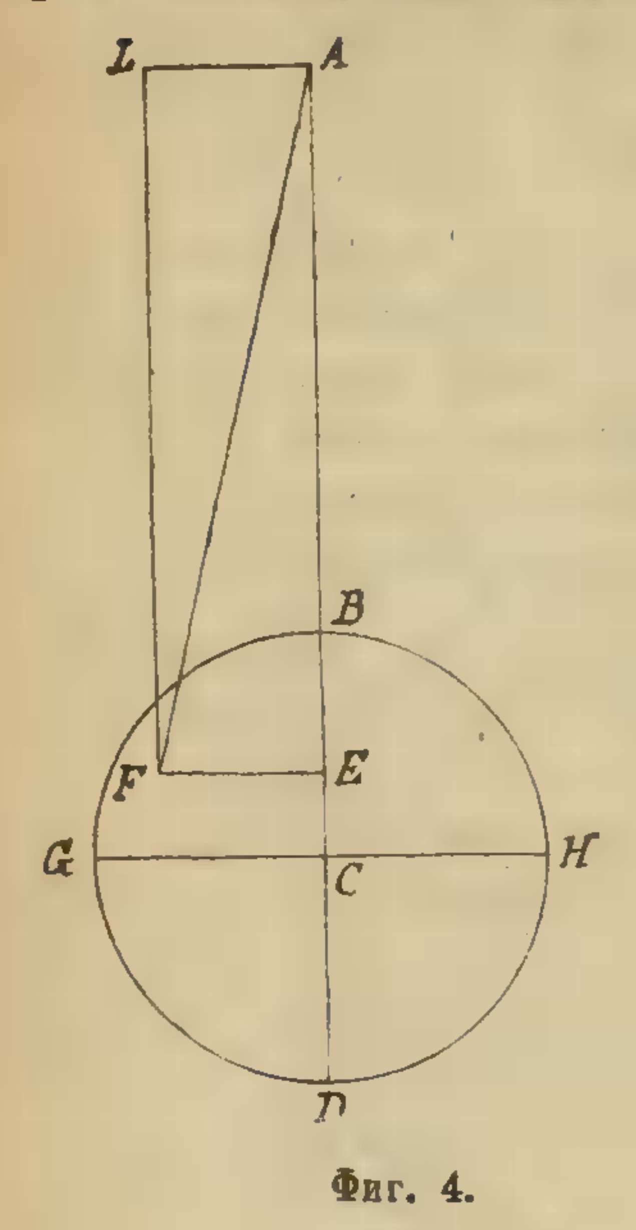
Итакъ, вотъ объясненіе Ньютона [2]), данное имъ въ 1686 году; посмотримъ, что прибавила къ этому объясненію исторія. Разберемъ сперва трактатъ Даніила Бернули [3]). Онъ различаетъ три причины прилива; первая по его мнѣнію состоитъ въ слѣдующемъ: „Пусть A— центръ луны (или солнца), BGDH—земля (см. черт. 4); проведемъ черезъ центръ луны (или солнца) и земли прямую AD и возьмемъ внутри земли любую точку F; затѣмъ проведемъ прямую FE перпендикулярно къ BD и прямую FA. Далѣе, построимъ прямоугольникъ FLAE. Каждая точка F притягивается или толкается къ A, и, если эту силу представимъ прямою FA, то ее можно разсматривать, какъ результирующую двухъ слагающихъ FL и FE. Теперь видно, что сила FE, будучи при-

[1]) T. III. p. 126—127.

[2]) Комментаторы не внесли ничего оригинальнаго въ это примѣчаніе, такъ что объясненіе это можно считать принадлежащимъ Ньютону.

[3]) „Traité sur le Flux et Reflux de la Mer". Par Mr. Daniel Bernoulli, Professeur d'Anatomie et de Botanique à Basle. Pour concourir au Prix de 1740. Въ видѣ приложенія въ III томѣ того же изданія „Началъ" (прим. 3 на стр. 4). Стр. 133.

ложена къ каждой точкѣ земли, только удлиннитъ послѣднюю вдоль прямой BD и, такъ какъ это одинаково справедливо для всѣхъ плоскостей, которыя проходятъ черезъ BD, то ясно, что земля образуетъ сфероидъ вращенія кривой BGD вокругъ BD". [1])



Фиг. 4.

Здѣсь Бернули разсматриваетъ дѣйствіе одной изъ слагающихъ силы тяготѣнія къ лунѣ (или солнцу), не разсматривая другой. Мы вправѣ поэтому ожидать, что во второй причинѣ онъ приметъ во вниманіе дѣйствіе другой слагающей, параллельной AD Между тѣмъ здѣсь онъ принимаетъ во вниманіе дѣйствіе всей силы, а не ея части. Но если отбросить первую причину, то слѣдующая фаза въ изложеніи второй будетъ не вѣрна: „Это (дѣйствіе луны) уменьшаетъ дѣйствіе тяжести къ центру земли къ каналѣ BD, въ то время какъ эта же *тяжесть не уменьшилась въ каналѣ GH*"... [2]) Въ самомъ дѣлѣ, тяжесть въ каналѣ GH (см. черт. 4) не только не уменьшится, *но еще увеличится.*

Д. Шоръ (Одесса).

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

Периклъ Діаманди.

Читатели наши знаютъ уже, что такъ зовутъ извѣстнаго счетчика въ умѣ (calculateur mental). Въ 263-мъ номерѣ „Вѣстника" мы помѣстили объ немъ статью. Недавно Діаманди посѣтилъ Одессу, гдѣ далъ нѣсколько публичныхъ сеансовъ, производилъ опыты вычисленія въ умѣ въ нѣкоторыхъ средне-учебныхъ заведеніяхъ и, между прочимъ, сдѣлалъ сообщеніе въ засѣданіи Математическаго Отдѣленія Общества Естествоиспытателей. Изложеніемъ этого сообщенія мы дополнимъ свѣдѣнія объ интересномъ счетчикѣ, приведенныя въ упомянутой выше статьѣ.

Сперва Діаманди изложилъ нѣкоторыя свѣдѣнія о себѣ. Отчасти свѣдѣнія эти заключаются въ упомянутой статьѣ. Діаманди обладаетъ сильно развитой зрительной памятью. Это значитъ, что ему легко за-

[1]) Стр. 136.

[2]) Фраза эта взята изъ изложенія второй причины, которое въ остальномъ мало отличается отъ Ньютонова объясненія. Стр 137.

помнить рядъ цифръ послѣ того, какъ онъ ихъ увидѣлъ написанными. Когда при немъ произносятъ рядъ цифръ, то для того, чтобы ихъ запомнить, онъ сперва долженъ представить ихъ себѣ написанными. „Я смотрю на число, говорилъ онъ, отворачиваюсь отъ доски, закрываю глаза и вижу число такимъ, какъ оно написано“. Думая о рядѣ нату-



Периклъ Діаманди.

ральныхъ чиселъ, одни представляютъ себѣ этотъ рядъ въ видѣ горизонтальной строки или горизонтальной линіи, другіе въ видѣ вертикальной линіи, третьи въ видѣ лѣстницы и т. д. Форма и направленіе этой линіи опредѣляютъ то, что принято называть „численной схемой“.

Численная схема Діаманди довольно сложна на первый взглядъ, хотя, —намъ кажется,—удобна въ томъ отношеніи, что съ нею легче оріентироваться. Она изображена на прилагаемомъ рисункѣ. Когда Діаманди думаетъ о какомъ либо числѣ, онъ представляетъ себѣ соотвѣтствующую точку на этой линіи.

Вторую часть своего сообщенія Діаманди посвятилъ упражненіямъ. На доскѣ были написаны слѣдующія цифры:

2	3	7	9	1
7	0	2	5	1
3	2	8	0	9
1	1	2	0	9
8	7	1	0	3

Діаманди бросилъ на нихъ нѣсколько взглядовъ, отворачиваясь каждый разъ отъ доски, и затѣмъ почти безошибочно произнесъ ихъ по порядку, читая сперва каждую горизонтальную строку, затѣмъ каждую вертикальную, и наконецъ по спирали: 23791199301781370250 и т. д.

Мы говоримъ „почти безошибочно" потому что изрѣдка Діаманди вмѣсто требуемой цифры произноситъ другую; обыкновенно онъ самъ исправляетъ свою ошибку.

Затѣмъ ему предложенъ былъ вопросъ: сколько секундъ въ 2300 столѣтіяхъ, считая и високосные годы. Черезъ $1^1/_2$ минуты онъ написалъ на доскѣ результатъ Опредѣляя затѣмъ, сколько секундъ въ 1414 столѣтіяхъ онъ ошибся, но ошибка заключалась въ томъ, что при опредѣленіи числа високосныхъ годовъ онъ вмѣсто заданнаго числа взялъ 1440. Довольно быстро онъ извлекъ квадратный корень изъ 15800625 и кубичный—изъ 483736625. Извлеченіе корня четвертой степени изъ 14331920656 далось ему значительно труднѣе: онъ нѣсколько разъ ошибался, пока получилъ вѣрный отвѣтъ. По его просьбѣ ему вторично было задано извлеченіе корня четвертой степени: ему было дано число 85308453 и онъ быстро отвѣтилъ, что оно равно $89^4 + 2566212$. Одинъ изъ присутствующихъ сообщилъ ему годъ, мѣсяцъ и число своего рожденія и онъ безошибочно и безъ промедленія указалъ день недѣли, когда произошло это событіе.

Послѣ этого ему одновременно были заданы шесть дѣйствій, и черезъ нѣсколько минутъ онъ написалъ на доскѣ слѣдующіе результаты:

$$47967 \times 698 = 33480966$$

$$487^2 = 237169$$

$$23^3 = 12167$$

$$87^4 = 51289761$$

$$9^{16} = 1853020188851841$$

$$7^8 = 5764801.$$

Затѣмъ, отвернувшись отъ доски, онъ произнесъ по порядку всѣ написанныя на ней цифры. На доскѣ было написано около 200 цифръ.

Нѣсколько труднѣе ему далось слѣдующее упражненіе: на доскѣ были укрѣплены 22 карты въ видѣ горизонтальной строки. Діаманди назвалъ ихъ слѣва направо и справа налѣво, а затѣмъ указывалъ,



Діаманди въ засѣданіи Матем. Отдѣленія Общества Естествоиспытателей.

красной онѣ масти или черной. При этомъ онъ сдѣлалъ нѣсколько ошибокъ. Послѣ этого упражненія онъ отвернулся отъ доски и безошибочно называлъ каждую изъ написанныхъ тамъ цифръ, когда ему указывали ея мѣсто, прося напр. назвать 14-ю цифру числа 9^{16}.

В. Г.

ЗАДАЧИ.

№ 565. Черезъ точку M, взятую внутри треугольника ABC, проводятся параллели къ сторонамъ BC, CA, AB, пересѣкающія AB и CA въ α и α_1, BC и AB въ β и β_1, CA и BC въ γ и γ_1.

Пусть Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 будутъ площади треугольниковъ ABC, $M\beta\gamma_1$, $M\gamma\alpha_1$, $M\alpha\beta_1$ и P_1, P_2, P_3—площади параллелограммовъ $A\beta_1 M\gamma$, $B\gamma_1 M\alpha$, $C\alpha_1 M\beta$. Доказать соотношенія:

$$\frac{\alpha\alpha_1}{a}+\frac{\beta\beta_1}{b}+\frac{\gamma\gamma_1}{c}=2. \quad \frac{\beta\gamma_1}{a}+\frac{\gamma\alpha_1}{b}+\frac{\alpha\beta_1}{c}=1,$$

$$\sqrt{\Delta_1}+\sqrt{\Delta_2}+\sqrt{\Delta_3}=\sqrt{\Delta}.$$

$$P_1+P_2+P_3=2\left(\sqrt{\Delta_1\Delta_2}+\sqrt{\Delta_2\Delta_3}+\sqrt{\Delta_3\Delta_1}\right).$$

М. Зиминъ (Юрьевъ).

№ 566. Доказать, что если

$$a+b+c=0,$$

то

1) $a^3+b^3+c^3=3abc$;

2) $a^5+b^5+c^5$ можетъ быть представлено въ видѣ многочлена, дѣлящагося безъ остатка на $5abc$;

3) $a^3b+b^3c+c^3a=a^3c+b^3a+c^3b$;

4) Выраженіе

$$-(a^3b+b^3c+c^3a)=-(a^3c+b^3a+c^3b)$$

можетъ быть представлено въ видѣ полнаго квадрата нѣкотораго многочлена.

(Заимств.) *Я. Полушкинъ* (Знаменка).

№ 567. Доказать, что въ треугольникѣ средняя гармоническая разстояній основаній биссекторовъ внутреннихъ угловъ отъ сторонъ въ два раза больше средней гармонической высотъ.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 568. Рѣшить уравненіе

$$\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^3-3\sqrt{3}}=2\sqrt{x-\sqrt{3}}\sqrt[4]{x^3+2x^2\sqrt{3}+6x+3\sqrt{3}}.$$

Б. Фрейманъ (Тамбовъ).

№ 569. Пусть m — составное число, разлагающееся на множители $\alpha\ \beta\ \gamma\ldots$ Показать, что для извлеченія изъ даннаго числа A корня m-ой степени съ точностью до единицы можно извлечь изъ A съ точностью до единицы корень степени α, затѣмъ изъ полученнаго корня —корень степени β съ точностью до единицы и т. д.

(Заимств.) *В. Г.*

№ 570. Въ нѣкоторомъ мѣстѣ, гдѣ $g = 981$ см., къ одному изъ грузовъ $P = 200$ грамм. машины Атвуда прибавляютъ грузъ x. Онъ пробѣгаетъ 24 см. въ продолженіе двухъ первыхъ секундъ паденія. Опредѣлить x.

(Заимств.) *М. Г.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 385 (3 сер.). *Пустъ* R_1, R_2, R_3, *суть радіусы трехъ круговъ, находящихся во внѣшнемъ соприкосновеніи. Обозначивъ черезъ* r *радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, составленный общими внѣшними касательными къ этимъ кругамъ, показать, что*

$$r = \frac{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2} + \sqrt{R_3} + \sqrt{R_1 + R_2 + R_3}}{\frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}}}.$$

Пусть O_1, O_2, O_3, — суть соотвѣтственно центры круговъ радіусовъ R_1. R_2, R_3. Пусть пары общихъ касательныхъ, касающіяся круговъ O_1. O_2, O_3, пересѣкаются соотвѣтственно въ точкахъ A, B, C. Обозначимъ стороны треугольника ABC соотвѣтственно черезъ a b, c. Назовемъ точки прикосновенія касательной BC къ кругамъ O_2, O_3 черезъ b_1, c_1, касательной CA къ кругамъ O_3, O_1 — черезъ c_2, a_2, касательной AB къ кругамъ O_1. O_2 — черезъ a_3, b_3. Чтобы получить центръ O круга, вписаннаго въ треугольникъ ABC, достаточно провести прямыя AO_1. BO_2, CO_3; дѣля углы A, B, C пополамъ, онѣ пересѣкаются въ точкѣ O. Изъ точки O опустимъ перпендикуляры Om, On, Ok соотвѣтственно на прямыя BC. CA AB. Введемъ обозначенія:

$$b_1c_1 = 2x;\ c_2a_2 = 2y;\ a_3b_3 = 2z.$$

$$Aa_2 = Aa_3 = x_1;\ Bb_3 = Bb_1 = y_1;\ Cc_1 = Cc_2 = z_1.$$

$$a + b + c = 2p = 2(x + y + z + x_1 + y_1 + z_1).$$

$$-x + y + z = X\quad x - y + z = Y,\ x + y - z = Z. \qquad (1)$$

Вычисляя площадь $\triangle$ треугольника $O_1O_2O_3$ по тремъ сторонамъ на основаніи равенствъ

$$O_2O_3 = R_2 + R_3,\ O_3O_1 = R_3 + R_1\ O_1O_2 = R_1 + R_2,$$

найдемъ:

$$\triangle = \sqrt{R_1R_2R_3(R_1 + R_2 + R_3)}.$$

Выражая площадь треугольника ABC черезъ rp, а затѣмъ черезъ сумму площадей 1) треугольника $O_1O_2O_3$, 2) трапецій $O_2O_3c_1b_1$, $O_3O_1a_2c_2$, $O_1O_2b_3a_3$, 3) треугольниковъ: BO_2b_1. BO_2b_3; CO_3c_1, CO_3c_2; AO_1a_2. AO_1a_3 — согласно съ принятыми обозначеніями получимъ:

$$r(x+y+z+x_1+y_1+z_1)=\sqrt{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_2)}+x_1R_1+y_1R_2+z_1R_3+$$
$$+x(R_2+R_3)+y(R_3+R_1)+z(R_1+R_2),$$

откуда

$$r(x+y+z)=\sqrt{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)}-x_1(r-R_1)-y_1(r-R_2)-z_1(r-R_3)+$$
$$+x(R_2+R_3)+y(R_3+R_1)+z(R_1+R_2) \qquad (2).$$

Изъ подобія треугольниковъ OAk и O_1Aa_3 имѣемъ:

$$\frac{Ok-O_1a_3}{O_1a_3}=\frac{Ak-Aa_3}{Aa_3} \qquad (3).$$

Но (см. 1)

$$Ak=p-a=x+y+z+x_1+y_1+z_1-y_1-2x-z_1=X+x_1.$$

Поэтому уравненіе (3) даетъ:

$$\frac{r-R_1}{R_1}=\frac{X}{x_1},$$

откуда

$$x_1(r-R_1)=R_1X.$$

По аналогіи

$$y_1(r-R_2)=R_2Y,\ z_1(r-R_3)=R_3Z.$$

Вставляя въ уравненіе (2) полученныя значенія произведеній

$$x_1(r-R_1),\ y_1(r-R_2),\ z_1(r-R_3)$$

получимъ:

$$r(x+y+z)=\sqrt{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)}-R_1X-R_2Y-R_3Z+x(R_2+R_3)+$$
$$+y(R_3+R_1)+z(R_1+R_2).$$

Вставляя (см. 1) значенія X, Y, Z, — дѣлая приведеніе во второй части и опредѣляя r, находимъ:

$$r=\frac{R_1x+R_2y+R_3z+\sqrt{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)}}{x+y+z} \qquad (4).$$

Опуская перпендикуляръ O_2D на прямую C_1O_3, имѣемъ:

$$b_1c_1=2x=O_2D=\sqrt{\overline{O_2O_3}^2-\overline{O_3D}^2}\ \sqrt{(R_2+R_3)^2-(R_1-R_3)^2}=2\sqrt{R_2R_3}.$$

Слѣдовательно для x—и по аналогіи для y, z—получимъ значенія:

$$x=\sqrt{R_2R_3},\ y=\sqrt{R_3R_1},\ z=\sqrt{R_1R_2}.$$

Подставляя эти значенія x, y, z въ уравненіе (4) и дѣля числителя и знаменателя второй части на $\sqrt{R_1R_2R_3}$, находимъ требуемое значеніе r.

Я. Полушкинъ (Знаменка); *М. Зиминъ* (Орелъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 402 (3 сер.). *Написать частное и остатокъ отъ дѣленія многочлена*

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m$$

на

$$(x-\alpha)\,(x-\beta).$$

Пусть $f(x)$ — данный многочленъ, $\psi(x)$ — искомое частное.

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\,\psi(x) + Mx + N, \qquad (1)$$

гдѣ M, N — искомые коэффиціенты остатка.

Полагая въ уравненіи (1) x послѣдовательно α, β, получимъ:

$$f(\alpha) = M\alpha + N, \quad f(\beta) = M\beta + N,$$

откуда:

$$M = \frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta} = A_0\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta} + A_1\frac{\alpha^{m-1}-\beta^{m-1}}{\alpha-\beta} + \ldots =$$

$$= A_0(\alpha^{m-1}+\alpha^{m-2}\beta+\ldots) + A_1(\alpha^{m-2}+\alpha^{m-3}\beta+\ldots)+\ldots=$$

$$= A_0\,\alpha^{m-1} + (A_0\beta + A_1)\,\alpha^{m-2} + (A_0\beta^2 + A_1\beta + A_2)\,\alpha^{m-3} + \ldots,$$

$$N = \frac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\alpha-\beta} = f(\alpha) - M\alpha =$$

$$= -[A_0(\alpha^{m-1}\beta+\alpha^{m-2}\beta^2+\ldots) + A_1(\alpha^{m-2}\beta+\alpha^{m-3}\beta^2+\ldots)+\ldots].$$

Напишемъ теперь частное отъ дѣленія $f(x)$ на $x-\alpha$ по извѣстной формулѣ:

$$A_0x^{m-1}x + (A_0\alpha + A_1)\,x^{m-2} + (A_0\alpha^2 + A_1\alpha + A_2)\,x^{m-3} + \ldots \qquad (2)$$

Дѣля по той же формулѣ многочленъ (2) на $x-\beta$, имѣемъ:

$$\psi(x) = A_0x^{m-2} + [A_0\beta + (A_0\alpha + A_1)]\,x^{m-3} +$$

$$+ [A_0\beta^2 + (A_0\alpha + A_1)\,\beta + (A_0\alpha^2 + A_1\alpha + A_2)]\,x^{m-4} + \ldots =$$

$$= A_0x^{m-2} + [A_0(\alpha+\beta) + A_1]x^{m-3} + [A_0(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) + A_1(\alpha+\beta) + A_2]x^{m-4} + \ldots$$

Н. С. (Одесса); *М. Зиминъ* (Орелъ).

№ 446 (3 сер.). *Въ треугольникъ* ABC *вписанъ треугольникъ* A'B'C'; *около того же треугольника* ABC *описанъ треугольникъ* A"B"C", *стороны котораго соотвѣтственно параллельны сторонамъ треугольника* A'B'C'. *Показать, что*

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{C''A}{AB''}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{A''B}{BC''}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{B''C}{CA''}.$$

Углы разсматриваемыхъ треугольниковъ условимся обозначать буквами ихъ вершинъ.

Стороны треугольниковъ ABC и $A'B'C'$ обозначимъ соотвѣтственно черезъ a, b, c и a', b', c'.

Кромѣ того. принимая во вниманіе параллельность сторонъ треугольниковъ $A'B'C'$ и $A''B''C''$, введемъ обозначенія:

$$\angle C''BA = \angle BC'A' = \beta;\ \angle B''CA = \angle CB'A' = \gamma.$$

Замѣтимъ также, что

$$\angle A' = \angle A'',\ \angle B' = \angle B'',\ \angle C' = \angle C''.$$

Тогда имѣемъ:

$$\frac{BA'}{b'} = \frac{\sin\beta}{\sin B},\ \frac{A'C}{c'} = \frac{\sin\gamma}{\sin C},$$

откуда

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{b'\sin\beta\sin C}{c'\sin\gamma\sin B} = \frac{\sin C\sin B'\sin\beta}{\sin B\sin C'\sin\gamma} \qquad (1).$$

Точно также

$$\frac{C''A}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin C''},\ \frac{AB''}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin B''},$$

откуда

$$\frac{C''A}{AB''} = \frac{c\sin\beta\sin B''}{b\sin\gamma\sin C''} = \frac{\sin C\sin B'\sin\beta}{\sin B\sin C'\sin\gamma};$$

слѣдовательно

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{C''A}{AB''}.$$

Точно также можно убѣдиться въ справедливости двухъ другихъ равенствъ.

М. Зиминъ (Орелъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *Н. С.* (Одесса).

ОТЧЕТЫ О ЗАСѢДАНІЯХЪ УЧЕНЫХЪ ОБЩЕСТВЪ.

Варшавскій Кружокъ Преподавателей Физики и Математики.

23 августа текущаго года утвержденъ уставъ Варшавскаго Кружка Преподавателей Физики и Математики, имѣющаго цѣлью слѣдить за успѣхами физики и споспѣшествовать преподаванію физики и математики въ среднихъ и низшихъ учебныхъ заведеніяхъ. Помѣщаемъ ниже свѣдѣнія о первыхъ засѣданіяхъ кружка, любезно сообщенныя намъ секретаремъ его.

Учредительное собраніе 25 сентября 1899 г.

Предсѣдательствовалъ товарищъ почетнаго предсѣдателя П. А. Зиловъ. Избраны должностныя лица: предсѣдатель *Н. М. Бородинъ*, секретарь *Ф. И. Ростовцевъ*, казначей *Е. Ө. Трубицынъ*, члены правленія *И. Я. Бѣляевъ*, *В. Я. Криваксинъ* и *В. А. Савицкій*.

Назначены дни будущихъ засѣданій: 19 октября, 21 ноября и 5 декабря.

Избраны въ дѣйствительные члены: А. Ф. Билима-Пастернаковъ, В. М. Булашевъ, Ф. Ю. Гиро, В. Г. Красницкій, Л. А. Ламовскій, Д. П. Петровъ, П. А. Православлевъ, А. А. Туголѣсовъ и И. Г. Швачко.

Засѣданіе 19 октября 1899 г.

Засѣданіе происходило въ физической аудиторіи Университета подъ предсѣдательствомъ почетнаго предсѣдателя Кружка, г. попечителя Варшавскаго Учебнаго Округа В. Н. Лигина Въ засѣданіи были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1. *П. А. Зиловымъ*—„О разрядныхъ явленіяхъ въ круксовыхъ трубкахъ".

2. *А. А. Трусевичемъ*—„Объ электролитическомъ прерывателѣ". Сообщенія сопровождались многими опытами.

Затѣмъ заслушаны были: протоколъ предыдущаго засѣданія, разрѣшеніе г. ректора Университета [redacted] г. попечителя Округа пользоваться для засѣданій физической аудиторіей Университета. Въ заключеніе было предложено и принято нѣсколько новыхъ дѣйствительныхъ членовъ.

Сообщилъ *Ф. Ростовцевъ.*

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

Bulletin de la Société Astronomique de France.

№ 5—1898.

Assemblée générale annuelle de la Soc. Astr. de France. Les progrés de l'Astronomie et de la Soc. Astr. de France. *C. Flammarion.*

Солнце приближается къ эпохѣ minimum'а солнечныхъ пятенъ, хотя большія пятна, видимыя даже невооруженнымъ глазомъ, и появляются временами особенно въ южномъ полушаріи. Періодъ пятенъ точно не опредѣленъ: такъ напр. промежутокъ между двумя послѣдними maxima былъ въ 10 л., между послѣдними minima — 11 лѣтъ. Эпоха minimum соотвѣтствуетъ наибольшимъ магнитнымъ возмущеніямъ на землѣ и maximum'у температуры (по мнѣнію Фламмаріона—по Жансену minimum солнечныхъ пятенъ сопровождается minimum'омъ температуры).

При лунныхъ затменіяхъ фаза затменія на фотографіи болѣе наблюдаемой глазомъ; это можно объяснить тѣмъ, что часть лунной поверхности, погруженная въ конусъ полутѣни, слегка освѣщается розоватыми лучами солнца, преломившимися въ земной атмосферѣ;—эти же лучи обладаютъ слабымъ дѣйствіемъ на фотографическую пластинку.

Наблюденіеми надъ Марсомъ особенно занимались: Lowell и Douglass (въ Лондонѣ), Perrotin (въ Ницѣ [redacted] Медонѣ) Бреннеръ (въ Истріи), Molesworth (на Цейлонѣ), Антоніади было поручено подвести итоги. Все таки остаются безъ объясненія такія странныя явленія какъ напр. то обстоятельство, что восточный берегъ Mer de Sablier съ 1877 г. подвинулся впередъ на 700 килом.; непонятно, почему Trivium Charontis измѣняетъ свою форму почему наиболѣе темной частью поверхности является то Mare Acidalium, то Lacus Solis [redacted] т. д. къ прежнимъ гипотезамъ о причинѣ двоенія каналовъ прибавились еще двѣ: согласно одной двоеніе есть результатъ присутствія на Марсѣ атмосферы (опытъ Менье), по другой—оптическая иллюзія.

Юпитеръ привлекалъ вниманіе многихъ астрономовъ. Въ результатѣ изслѣдованій оказалось, что различныя зоны его вращаются съ различными скоростями; для экваторіальной зоны, лежащей между $+10^0$ и -12^0 періодъ вращенія $= 9$ ч. 50 м. 35 с., въ то время какъ для зоны между $+85^0$ и $+28^0$ періодъ $= 9$ ч. 55 м. 37 с. Сравнивая линейныя скорости экваторіальной зоны и сосѣднихъ съ нею, получаемъ, что относительная скорость экваторіальной зоны $= 420$ кил. въ часъ Замѣчательно, что скорость экваторіальной зоны съ теченіемъ времени уменьшается: такъ въ 1879 г. періодъ вращенія ея $= 9$ ч. 49 м. 59 с., а теперь 9 ч. 50 м. 35 с., что для линейной скорости даетъ уменьшеніе въ 42 кил. въ часъ

Въ кольцахъ Сатурна замѣчены новые просвѣты, свидѣтельствующіе о неустойчивости этой системы.

Относительно Венеры ничего положительнаго узнать не удалось.

Пуанкаре доказалъ, что если принять во вниманіе кромѣ притяженія [redacted] другія обстоятельства (треніе, обусловливаемое приливами, сопротивленіе междупланетной среды, магнитныя дѣйствія и т. д.), то извѣстный законъ о прочности солнечной системы перестанетъ быть вѣрнымъ. Всѣ эти обстоятельства ведутъ къ разсѣянію энергіи и приведутъ солнечную систему къ такому состоянію, когда всѣ планеты со своими спутниками будутъ вращаться около одной оси, какъ части одного цѣлаго; за этимъ состояніемъ послѣдуетъ паденіе планетъ на солнце.

Малыхъ планетъ открыто 7 (6 въ Ницѣ Charlois), такъ что общее число ихъ = 432.

Открыта только одна новая комета (Perrine на Обсерв. Lick'а); найдена по вычисленной эфемеридѣ комета д'Арре. Леонидовъ наблюдали мало.

Вновь найденный спутникъ Сиріуса былъ наблюдаемъ нѣсколько разъ; для періода обращенія его найдено число 52 г.; разстояніе его отъ Сиріуса = приблизительно разстоянію Урана отъ солнца; масса его вѣроятно втрое больше массы солнца.

Найденный по предсказанію [redacted] вычисленіямъ Бесселя спутникъ Проціона былъ наблюдаемъ снова на разстояніи 4,7″ при углѣ положенія въ 324,°1.

Двойными звѣздами занимались: Sée, Burnham, Глазенапъ, Innes.

До сихъ поръ наиболѣе сильное собственное движеніе извѣстно было у звѣзды 1830 Groombridge въ созвѣздіи Б. Медвѣдицы; оно равнялось 7,″05 въ годъ. Въ настояшее время найдена звѣзда съ болѣе быстрымъ движеніемъ, а именно 8,″7 (№ 243 пятаго часа катал. Cordoba).

Число членовъ французскаго астрономическаго общества дошло до 2000. Они разсѣяны по всему земному шару, въ Гваделупѣ, на Канарскихъ и Азорскихъ островахъ, на Балканахъ, въ Канадѣ, Боготѣ, на Мартиникѣ [redacted] т. д. Дамскій призъ присужденъ de la Baume Pluvinel'ю, призъ Жансена — Лэнгли за совокупность его астрономическихъ работъ.

Possibilité de déplacer les poles de la terre par des actions mécaniques. *M. Fruché.* Авторъ останавливается на слѣдствіяхъ изъ одной теоремы механики, касающейся вращенія тѣлъ. Если система подвержена только дѣйствію внутреннихъ силъ, то равнодѣйствующая ось моментовъ количествъ движенія составныхъ частей системы сохраняетъ въ пространствѣ неизмѣнное положеніе. Если система вращается около постоянной оси какъ твердое тѣло, то равнодѣйствующая ось моментовъ количествъ движенія совпадаетъ съ осью вращенія".

Пусть система состоитъ изъ двухъ твердыхъ частей P и Q, могущихъ перемѣщаться одна относительно другой. Пусть первоначально система вращалась около нѣкоторой оси. Если, повинуясь дѣйствію внутреннихъ силъ P и Q совершатъ замкнутый циклъ перемѣщеній и придутъ въ первоначальное положеніе, то ось сохранитъ первоначальное положеніе въ пространствѣ, хотя и измѣнитъ его относительно P и Q. Предположимъ, что земной шаръ есть тѣло вращенія, опустимъ прецессію и нутацію [redacted] допустимъ, что нѣкоторая большая масса перемѣщается по кругу съ центромъ на экваторѣ; ось вращенія сохранитъ согласно указанной теоремѣ свое положеніе въ пространствѣ, т. е. будетъ оставаться направленной къ той же точкѣ неба, но *внутри* земли она измѣнитъ свое положеніе, т. е. полюсы перемѣстятся; если это движеніе протянется достаточно долго то полюсы могутъ перейти на экваторъ; если, начиная съ этого момента, перемѣщеніе массы прекратится, то новое положеніе оси сохранится; если же движеніе продолжится, то полюсы могутъ помѣняться мѣстами.

Авторъ задается вопросомъ, какъ велика энергія, которую нужно затратить для перемѣщенія полюсовъ въ плоскость экватора, [redacted] для вычисленной величины даетъ такое наглядное выраженіе: искомую энергію могли бы доставить 1000000 самыхъ сильныхъ паровыхъ машинъ (такихъ, какъ на броненосцахъ), работая непрерывно 200000 лѣтъ; для этой цѣли потребовалось бы сжечь такое количество угля, какое на землѣ можно было бы добыть въ 10000000 лѣтъ, предполагая ежегодную добычу угля равною нынѣшней.

L'air liquide.

Le cirque lunaire Flammarion. *L. Rudaux.* Во время полнолунія интересно наблюдать на лунѣ нѣкоторыя свѣтлыя и темныя пятна и полосы, природа коихъ неизвѣстна. Rudaux даетъ рисунокъ такихъ пятенъ и полосъ въ циркѣ Фламмаріона.

La photographie au clair de lune. *F. Quénisset et E. Touchet.* Для полученія фотографическихъ снимковъ при лунномъ освѣщеніи необходимъ свѣтосильный объективъ и очень чувствительныя пластинки. Если отверстіе объектива $=f:7$, то при хорошей погодѣ и высотѣ луны въ 45^0 достаточна поза отъ 30 м. до часу; при портретномъ объективѣ съ отверстіемъ въ $f:3$ достаточно нѣскольких минутъ.

Пластинки требуются ортохроматическія. Между прочимъ для приготовленія очень чувствительныхъ пластинокъ годится такой рецептъ:

спирту въ 80^0	100 кб. с.
раствора азотнокисл. серебра въ $^1/_{15}$ . .	2 кб. с.
амміаку	10 кб. с.

Пластинку слѣдуетъ опустить въ растворъ на 3—4 минуты и высушить.

Недостатокъ фотографій при лунномъ освѣщеніи состоитъ въ томъ, что, благодаря продолжительной позѣ, успѣваютъ перемѣниться тѣни, что впрочемъ не особенно важно при фотографированіи отдаленныхъ пейзажей. На фотографіи получается масса деталей, которыхъ невооруженнымъ глазомъ нельзя было бы различить.

Авторамъ удалось между прочимъ получить на снимкѣ скакового круга въ Булонскомъ лѣсу изображеніе тумана, причемъ видно, какъ этотъ туманъ такъ сказать, сливается черезъ заборъ на дорогу.

La prévision du temps. Mémoire présenté à la Soc. Astr. par *A. Ivetot.* — *E. Caspari.*

Nouvelles de la Science Variétés.

13 марта 1898 было покрыто пятнами 4194500000 кв. кил. солнечной поверхности; наибольшая группа пятенъ имѣла въ длину 228000 к.

Le ciel du 15 Mai au 15 Juin. *К. С.* (Умань).

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ и БРОШЮРЫ.

145. Лѣтніе повторительные курсы для обучающихся въ начальных городскихъ школахъ, устроенные при Бакинскомъ техническомъ училищѣ. Прил. къ Циркуляру по управленію Кавказск. Уч. Окр. за 1898 годъ. № 4.

146. О физическомъ воспитаніи въ Швеціи. Путевыя впечатлѣнія. Надзирателя Бакинскаго техническаго училища *А. Дъдулова.* Прил. къ Циркуляру по управленію Кавказск. Уч. Окр. за 1898 годъ. № 5.

147. Протоколъ засѣданія коммиссіи для обсужденія результатовъ испытанія учениковъ 1-го отдѣленія армянскаго начальнаго училища при Закавказской учительской семинаріи, произведеннаго 10 ноября 1897 года, съ цѣлью оцѣнки успѣховъ ихъ въ усвоеніи русской рѣчи по естественному методу. Прил. къ Циркуляру по упр. Кавказск. Уч. Окр. за 1898 годъ. № 6.

148. Отчетъ о лѣтней колоніи учащихся Бакинской Маріинской женской гимназіи за 1897 годъ. Прил. къ Циркуляру по управленію Кавказск. Уч. Окр. за 1898 годъ. № 7.

149. Проэктъ устава вспомогательнаго общества „Санаторій" на Эссентукской группѣ Кавказскихъ минеральныхъ водъ. М. 1898.

150. **Краткія свѣдѣнія изъ исторіи и современнаго положенія Кавказскихъ минеральныхъ водъ.** Отчетъ по Эссентукской благотворительности. 1898 г. М. 1898.

151. *С. Адамовича.* **Формулы по ариѳметикѣ алгебрѣ, геометріи и тригонометріи съ приложеніемъ таблицъ:** первоначальныхъ чиселъ до 10000, нечетныхъ составныхъ до 10000 и мн. др. Кіевъ. 1898. Ц. 40 к.

152. *В. П. Мининъ,* преподаватель Московской 3-й гимназіи. **Сборникъ геометрическихъ задачъ.** Изданіе седьмое (47-я тысяча экземпляровъ) съ значительно расширеннымъ собраніемъ задачъ, рѣшаемыхъ совмѣстнымъ примѣненіемъ геометріи и тригонометріи. Москва 1898. Ц. 90 коп.

153. **Курсъ теоріи вѣроятностей.** Проф. *М. Тихомандрицкаго* Харьковъ. 1898.

154. **Прямолинейная тригонометрія** для среднихъ учебныхъ заведеній. Составилъ *И. Злотчанскій,* преподаватель Одесскаго реальнаго училища св. Павла. Третье улучшенное изданіе. Одесса. 1899. Ц. 75 к.

155. *Ф. Клейнъ.* **Лекціи по избраннымъ вопросамъ элементарной геометріи.** Съ приложеніемъ мемуара Ванцеля: Изслѣдованіе средствъ распознать, можно ли геометрическую задачу разрѣшить съ помощью циркуля и линейки. Переводъ студ. *Н. Парфентьева* подъ ред. пр.-доц. *Д. М. Синцова.* Изданіе Физико-Математическаго Общества. Казань. 1898. Ц. 75 к

156. *П.. К. Энгельмейеръ.* **Критика научныхъ и художественныхъ ученій Гр. Л. Н. Толстого** М. 1898. Ц. 35 к.

157. **Эволюція понятія о числѣ.** *М. Волковъ.* Спб. 1899. Ц. 80 к.

158. **Преосвященнаго Николая, Епископа Таврическаго и Симферопольскаго, бывшаго Алеутскаго и Аляскинскаго, прощальное слово къ пастырямъ и пасомымъ Алеутской епархіи и прощальное посланіе къ Президенту Соединенныхъ Штатовъ.** Нью-Іоркъ. 1898.

158. *В. В. Рудневъ.* **Сборникъ ариѳметическихъ задачъ для народныхъ школъ,** приспособленный и для инородческихъ школъ. Отдѣлъ для учащихся въ двухъ тетрадяхъ. I тетрадь. Числа первой сотни. Рига. 1898. Ц. 15 к. (2 экз.).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *Л Магазаника* (Бердичевъ) 523, 531, 535, (3 сер.); *А. Гвоздева* (Курскъ) 535, 538. (3 сер.); *П. Лисевича* (Курскъ) 535, 538 (3 сер.); *К. Пеніонжкевича* (Лубны) 535, 537, 538, 541, 544, 545 (3 сер.); *Я. Теплякова* (Кіевъ) 537, 544, 545, 549, 550, 557 (3 сер.); *О. Бѣлоярцева* (Казань) 553, 555, 557 (3 сер.); *Б. Фреймана* (Тамбовъ) 525, 535, 536, 538, 539, 545 (3 сер); *Я. Полушкина* (Знаменка) 488 (3 сер.), 496 (2 сер.); *Ф. Шнейдера* (Бѣлостокъ) 465, 477 (3 сер.).

Редакторъ **В А. Циммерманъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено цензурою, Одесса, 29-го Октября 1899 г.

Типографія Г. М. Левинсона, Ришельевская, домъ № 19.